金融資産選択行動

千　葉　頼　夫

§1　は　じ　め　に

「不確実性下の意思決定（Decision Making under Uncertainty）」の理論として発展したTobin〔20〕，Markowitz〔13〕にはじまる「金融資産選択理論（Theory of Portfolio Selection）」は，主として，蓄積された資産の構成要素相互の関係，すなわち，「資産構成の問題（Problem of Assets Composition）」に分析の重点がおかれ，消費行動は資産選択理論のフレーム・ワークの枠外におかれてきた。

しかしながら，それらが動学的フレーム・ワークの中で考察するとき，個人の合理的行動として，資産選択とともに，消費配分に関する意思決定とが同時斉合的に分析されなければならない。

このような個人の動学的最適消費・資産選択決定問題は，所得の一部が不確実な収益をもつ資産によって生み出される場合の消費決定問題を扱ったPhelpsモデル〔18〕の拡張，精緻化として，Samuelson〔20〕，Hakanson〔5〕〔6〕〔7〕〔8〕，Merton〔14〕，Mossin〔17〕，Zabel〔21〕，Anastasopulous〔1〕らによって，取扱われている。

各々のモデルは，効用関数の特定化，不確実性の扱い，危険資産の数，分析方法等々に，その特徴を有している。

本稿では，資産選択理論と所得配分理論の一般的な動学分析を展開する。§2においては，動学的モデルが提示され，動的計画法の分析手法が説明される。§3では，効用関数を相対的危険回避度が一定な効用関数に特定化して，最適政策の性質について検討する。

§2 動的計画性によるモデル分析

$(N-1)$種類の危険資産(Risk Assets)[1]と，そのほかに安全資産(Riskless Asset)が存在するとき，我々のモデルの個人は，現在時点で，T期間の計画期間[2]の展望の下に，利子率と各資産の予想収益率をもとにして，期待効用が最大になるように利用可能な富を最適消費・資産需要・貸付け（借入れ）に配分するものとする。そこで，モデルは次のようになる。

記号は以下のように定め，すべて，貨幣タームで表示されるものとする。

W_t t期首における手持富$(t=1, 2, \cdots T)$
p_{it} t期におけるi番目の資産の価格$(i=1, 2, \cdots N)$
c_t t期における消費額
x_{it} t期において，(W_t-c_t)からi番目の資産に投資する額
y_t t期における非利子所得
β_{it} t期におけるi番目の資産の収益率（確率変数とする）
γ_t-1 t期における利子率
x_{1t} t期における貸付けあるいは借入額
Y_t t期における非利子所得流列の現在値
S t期の空売買が可能な集合
γ 主観的効用割引率
E 期待演算子

ここでは，完全競争と資産の完全分割性を仮定し，p_{it}とx_{it}とは独立であると考える。また資産変換に伴う費用は存在しないものとする[3]。

個人は，資産に関して，貸付けと借入れが一定の利子率で，貸付けについては回収不能になる危険が存在しないものとすると，個人のストキャスティクな予算制約式は，

$$(2.1)\qquad W_{t+1}=r_t x_{it}+\sum_{i=2}^{N}\beta_{it}+y_t$$

となる。安全資産の収益率と非利子所得は，現在時点で，全計画期間にわたって確定的にわかっているものとする。

危険資産からの収益率は，確率変数であるが，収益率分布の時間にわたる独立性を仮定する。また各危険資産の収益率の確率分布は互いに独立であるとする。

空売買 (Short Sale) の場合，t 期首に行われた空売買は，t 期末，すなわち，$(t+1)$ 期首において，$(t+1)$ 期の価格で清算されるものとして，期末の富について（２．１）式が成立するものと仮定する。

いま，個人の主たる目的は，消費であって，資産保有も結局は将来消費を増加するために行われるものと考えて，遺産の可能性はないものとする。したがって，$W_{t+1}=0$ を仮定する。このことは，$c_T=W_T$ であって，計画の最終期Tにはすべての富を消費することを意味する。また，初期の富 W_1 は与えていると仮定する。

遺産の可能性を残すとすれば，遺産 $W_T \fallingdotseq 0$ を評価する効用関数を導入すればよい。

それゆえ，個人の t 期間にわたる効用関数は t 期間の消費 c_t のみに依存する関数，

$$(2.2)\qquad U=E[\sum_{t=1}^{T}\gamma^{t-1}u(c_t)]$$

と定める。ただし，γ は各期間を通じて一定であり，$0<\gamma<1$ とする。そして，$u(c_t)$ に関して，少なくとも２階まで微分可能であり，かつ，$c<0$ に対して，強い意味で凹な単調増加関数である。

以上の仮定から，個人の解くべき問題は次のように定式化される。

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
 & \text{Maximize} \quad E[\sum_{i=1}^{T} \gamma^{t-1} u(c_t)] \\
 & \text{Subject to} \\
(2.1) & W_{t+1} = r_t x_{it} + \sum_{i=2}^{N} \beta_{it} x_{it} + y_t \\
(2.3) & c_t \geq 0 \\
(3.4) & x_{it} \geq 0, \quad i \in S
\end{cases}
$$

このような動学的最適決定問題は,「動的計画法 (Dynamic Programming)」[4] の手法を使うことができる。

この手法では，最適性の原理によって，後方から回帰的に解いていく。第T期における決定問題は,

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}
(2.5) & f_T(W_T) \equiv \underset{\{c_T,\, c_{iT}\}}{\mathrm{Max}} \quad E\left[\sum_{t=1}^{T} \gamma^{t-1} u(c_t)\right] \\
 & \text{Subject to} \\
(2.3) & c_T \geq 0 \\
(2.5) & c_T = W_T
\end{cases}
$$

で表わされ，内点最大化が生ずるとすれば，この式をn個の変数 c_t, x_{it} のそれぞれに関して偏微分して,

$$(2.\ 6) \quad 0 = u'(c_T) - \gamma^{-1} E\, u'(c_{T-1}) \sum_{i=2}^{N} x_{iT} \beta_{iT}$$

$$(2.\ 7) \quad 0 = E\, u'(c_{T-1})(W_{T-2} - c_{T-2}) \beta_{iT-2}$$

となる。

したがって，最適消費・資産選択の組 $\{c_t^*, x_{it}^*\}$ は，その期首の富 W_T の関数として得られる。つまり，最適方程式,

$$(2.\ 9) \quad c_T^* = f_T(W_T)$$

$$(2.10) \quad x_{iT}^* = g_{iT}(W_T)$$

を得るのである。

次に，第 ($T-1$) 期における決定問題は,「派生効用関数 (Derived Utility Function)」 V_{T-1} を使って,

$$
(\text{III})\begin{cases}
(2.11) \quad V_{T-1}(W_{T-1}) = \underset{\{c_{T-1}, x_{iT-1}\}}{\text{Max}} E[u(c_{T-1}) + \gamma^{-1} V_T(W_T)] \\
\qquad\qquad \text{Subject to} \\
(2.12) \quad c_{T-1} \geq 0 \\
(2.13) \quad x_{iT-1} \geq 0, \quad i \in S \\
(2.14) \quad W_{T-1} = r_{T-1} x_{iT-1} + \sum_{i=2}^{N} \beta_{iT-2} x_{iT-1} + y_{T-1}
\end{cases}
$$

で表わされ，内点最大化が生ずるとすれば，同様にして，最適解が W_{t-1}の関数として得られる。

一般に，第 t 期（$t=1, 2, \cdots T$）における決定問題は，

$$
(\text{IV})\begin{cases}
V_t(W_t) \equiv \underset{\{c_t, x_{it}\}}{\text{Max}} E[u(c_t) + \gamma^{-1} V_{t-1}(W_{t-1})] \\
\qquad\qquad \text{Subject to} \\
(2.15) \quad W_{t-1} = r_{t-1} x_{it-1} + \sum_{i=2}^{N} \beta_{it-1} x_{it-2} + y_{t-1} \\
(2.\ \ 3) \quad c_t \geq 0 \\
(2.\ \ 4) \quad x_{it} \geq 0 \quad i \in S
\end{cases}
$$

で表わされ，これを解くことによって，最適解は次の形で得ることができる。

$$(2.16) \quad c_t^* = f_t(W_t)$$

$$(2.17) \quad x_{it}^* = g_t(W_t)$$

２階の条件に関しては，個人の効用関数に関する仮定より満足されることがわかる。

（Ⅳ）の定式化によって得られる最適解は，個人の選好関数，非利子所得，利子率，資産投資額，資産収益等に依存しており，確定的に決定し得るのは，今期の最適解のみであり，将来期間に関する最適解として，確定的な値を見出すことはできない。

以下では，最適消費・資産選択政策の性質を検討するに必要な命題を提示する。

〔命題１〕

効用関数が有界であると仮定すると，個人の期待効用最大化問題は任意の t(≧1)に関して成立する[5]。

（証明）

効用関数が有界どあれば，目的関数 $Vt(Wt)$ は有界である。また，$Vt(Wt)$ は連続であることは明らかである。

〔命題２〕

関数列 $\{V_t(W_t)\}$ は，一意な極大値をもつ。

（証明）

$t=t'$ に対して，

$$(2.18)\quad V_t(W_t) \equiv \underset{\{c_T, c_{iT}\}}{\mathrm{Max}}\, E[u(c_t) + \gamma^{-1} V_{t-1}(W_{t-1})]$$

$$(2.19)\quad J_t'(W_t') \equiv \mathrm{Max}\, E[u(c_t') + \gamma^{-1} J_t'{}_{-1})]$$

を定義する。いま，第 t 期においてある決定 $\{c_t,\ x_{it}\}$ を行ったとすると，第（$t+1$）期の状態変数 W_{t+1} が定まり，残余の過程は（$T-t$）個の期間から成立する。ところで，最適性の原理によって生じた過程は，毎期最適政策を構成しなくてはならない。

したがって，t，t′期を現在期と考えたときの k 期の状態変数は，それぞれ，W_{t-k}，$W_{t'}$ となる。

数列$\{W_{t-k}\}$に対して，定義(2，18)，(2，19)により，

$$\begin{aligned}(2.20)\quad V_t'(W_t') &\leqq \gamma E[V_{t-1}'(W_{t-1}') - J_{t-1}'(W_{t-1}')] \\ &\leqq \gamma^2 E[V_{t-2}'(W_{t-2}') - J_{t-2}'(W_{t-2}')] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\leqq \gamma^{t-1} E[V_1(W_1) - J_1(W_1)] = 0\end{aligned}$$

が成立する。同様に，数列 $\{W_{t'-k}\}$ に対して，

$$(2.21)\quad V_t'(W_t') - J_t'(W_t') \geqq 0$$

が成立する。よって，任意の $t(\leqq 1)$ に対して，

$$V_t(W_t) = J_t(W_t)$$

が成立する。

〔命題３〕

$V_t(W_t)$ は，任意の $t\ (\geqq 1)$ に対して，厳密な意味で凹な単調増加関数である。

（証明）

まず，$V_t(W_t)$ が強い意味で凹なることを示す

（ｉ）n＝１のとき，（Ⅳ）の定式化より，

$$(2.22)\quad V_1[\lambda W_1 + (1-\lambda)Z] = \underset{\{c_1, x_{i1}\}}{\mathrm{Max}}\, E(u(c_1))$$

が成立する。ただし $0 < \lambda < 1$ である。いま，u_1を

$$(2.23)\quad u_1 = \lambda\ \overline{u_1} + (1-\lambda)\tilde{u}_1$$

でおきかえる。ただし，$\overline{c_1}$ はWに関して W_1 を満足し，$\tilde{c}_1$ は Z に関して W_1 を満足する値であるとする。そのとき，

$$V_1[\lambda W_1 + (1-\lambda)Z] = \underset{\{\bar{c}_1, \tilde{c}_1\}}{\mathrm{Max}}\, Eu[\lambda \overline{c_1} + (1-\lambda)\tilde{c}_1]$$

となる。ところで，$u(c)$はcに関して強い意味で凹であるから，

$$V_1[\lambda W_1 + (1-\lambda)Z] > \underset{\{\bar{c}_1, \tilde{c}_1\}}{\mathrm{Max}}\, Eu[\lambda \overline{c_1} + (1-\lambda \tilde{c}_1]$$

$$\geqq \lambda \mathrm{Max}\, Eu(\overline{c_1})$$

$$= \lambda\, V_1(W_1) + (1-\lambda)\, V_1(Z)$$

が成立する。

（ii）$n = k-1$のとき $V_{k-1}(W_{k-1})$ は強い意味で凹であるから，$n = k$のとき，$V_k(W_k)$は凹である。

更に，$V_k(W_k)$ が単調増加であることは，$u(c)$ が単調増加関数であることから明らか。

以上の命題から，次の定理が成立する。

〔定理１〕

（Ｉ）で定式化された動学的最適決定問題の解は，一意に存在する。

（注）

(1) 安全資産として確定利子率をもたらす資産を考える。そのとき，確実利子率の最も高い安全資産のみが保有の対象となるので，安全資産は１つしか存在しないと考えてよい。

(2) 計画期間の始点を１期，終点を（Ｔ＋１）期として，Ｔ個の計画期間に分割するものとする。各期間の長さは同じである必要はないが，便宜上，同じであると仮定する。

(3) 多期間資産選択における資産変換費用の問題は，資産構成が資産選択に直接影響を与えるか否にある。

資産変換費用が存在しない場合には，ｔ期における資産構成は（ｔ＋１）期首での資産選択に直接影響を与えないが，資産変換費用が存在する場合には，ｔ期の資産構成が（ｔ＋１）期首での資産選択に影響を与える。

資産変換費用を導入した単純モデルについては，Zabel〔21〕参照

(4) 最適性の原理については，Bellman〔３〕参照

(5) Arrow〔２〕参照

§3　最　適　政　策

前節では，無制限の空売買を認めてきたが，ここでは，個人が貸付けあるいは借入れについて危険が伴い，また，借入れについては，各時点で支払能力がなければならないと仮定すると，所謂，「no-easy-money condition」，「solvency condition」は

$$P_r\{\sum(\beta_{it}-r_t)\theta_i<0\}>0 \qquad (3.1)$$

$$(3.2)\quad P_r\{\sum_{i=2}^{N}(\beta_{it}-r_t)x_{it}+r_t(W_t-c_t)+y_t\leqq Y_t\}=1$$

と表わされる。ここでP_rは確率を表わす。

以上の仮定から，個人の解くべき問題は次のように定式化される。

$$(\mathrm{V})\quad\left[\begin{array}{l}\text{Maximize } E[\sum_{t=1}^{T}\gamma^{t-1}u(c_t)]\\ \\ \text{Subject to}\\ \quad c_t\geq 0\\ \quad x_{it}\geq 0,\quad i\notin S\\ \quad P_r\{\sum_{i=2}^{N}(\beta_{it}-r_t)\theta_i<0\}>0\\ \\ \quad P_r\{\sum_{i=2}^{N}(\beta_{it}-r_t)x_{it}+r_t(x_t-c_t)+y_t\leqq Y_t\}=1\end{array}\right.$$

したがって，第 t 期における決定問題は，

$$(3.\ 3)\quad J_T(w_T)=\underset{\{c_t,x_{it}\}}{\mathrm{Max}}\{u(c_t)+\gamma_t E[J_{T-1}(\sum_{t=1}^{T}\beta_{it}-\gamma_t)x_{it}$$
$$+r_t(x_t-c_t)+y_t)]\}$$

で表わされ，内点最大化が生ずるものとすると，最適消費・資産選択の組$\{c_t^*,\ x_{it}^*\}$が決定する。

（命題 1 ）

$v=(v_2,\ v_3,\ \cdots v_n)$ を実数ベクトルとする。

このとき，

$$(\mathrm{VI})\quad\left\{\begin{array}{l}h(v_2\cdots,v_N)\equiv E[u(\sum_{i=2}^{N}(\beta_i-r_t)v_i+r_t)]\\ \text{Subject to}\\ c_t\geq 0\\ v_i\geq 0,\quad i\notin S\\ P_r\{\sum_{i=2}^{N}(\beta_{it}-r_t)v_i-\gamma\geqq 0\}=1\end{array}\right.$$

は，一意な極大値をもつ。

（証明）

いま，Ｄを（13)，（14）を満たす点の集合とすると，Ｄが有界で凸な閉集合であることが示される。

次に，関数ｈは厳密な意味で凹であるので，ｈ関数ｈがＤ上で極大値をもち，そのときの v^* は有限で一意である。

次に最適解の特性を知るために，実証分析において，よく使用されている Pratt〔19〕の相対的危険回避度 λ が正の定数となる場合を検討する。

$$(3.\ 4)\quad u(c_t)=\frac{1}{1-\lambda}\ c_t^{1-\lambda}\quad \lambda>0,\ \lambda\neq 1$$

この関数に関する問題の解を求めると，次の定理に整理される。

〔定理２〕

効用関数（３，３）に対する最適解は一意に存在し，次のように与えられる。

ただし，

$$k(1-\lambda)<\frac{1}{\alpha}(0<\lambda<1),$$

および

$$x_t\leq -Y_t$$

とする。

$$(3.\ 5)\quad f(W_1)=u(x_t+Y_t)$$

$$(3.\ 6)\quad c_t^*(W_t)=B\ (x_t+Y_t)$$

$$(3.\ 7)\quad x_{it}^*=(1-B)(1-v^*)(x_{it}+Y_t)-Y$$

$$(3.\ 8)\quad x_{it}^*=(1-B)v^*(x_{it}+r_t)$$

ここで，定数Ａ，Ｂは次のようになる。

$$A=\{1-(\alpha k(1-\lambda)\frac{1}{\lambda}\}-\lambda$$

$$B=1-(\alpha k(1-\lambda)\frac{1}{x}$$

（証明）

（３，５），（３，６），（３，７），（３，８）が問題の解であることを示せばよい。

（３，５）を（３，３）に代入して，

$$T(W_t)=\mathrm{Max}\{\frac{1}{1-\lambda}\ c_t^{1-\lambda}+\alpha k(1-\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}\}$$

$$\text{Subject to } c_t>0,\ v_i\geq 0,\ i\in S\quad P_r\{\sum_{i=2}^{N}(\beta_t-r_t)v_i\geqq 0\}=1$$

ところで，$Y_t=\dfrac{y_t}{r_t-1}$ であるから，

$$P_r\{\sum_{i=2}^{N}(\beta_{it}-r_t)x_{it}+r_t(W_t+Y_t-c_t)\geqq 0\}=1$$

したがって，（ V ）を満足するのは，

（ i ）$W_t+Y_t-c_t>0$，及び，$x_{it}=0$

（ii）$W_t+Y_t-c_t>0$，及び，$P_r\{\sum\dfrac{(\beta_{it}-r_t)x_{it}}{(x_t+Y_t-c_t)}+\gamma_t\geqq 0\}=1$

のいずれかである。

〔定理２〕より，モデルの最適解 V_t（W_t）の性質が検討できる。

（３，５）より，効用関数（W_t+Y_t）は線形となっており，係数Aは，与件が与えられるとき正定数であるから，（W_t+Y_t）の増加に応じて最適解 V_t（W_t）は逓減的に増加する。

最適消費は（３，６）によって，将来に対する効用の評価をあらわす α の効果を考えると，$c_t(W_t)$ は，α の増加とともに減少することが係数 β より明らかである。

最適貸付け政策は，富に関して線形である。また，（$1-B$）が常に正であるから，x^* が x_{it} に関して増加するか，減少するかは，（$1-v'$）が正が正か負かに依存する。

最後に，最適資産選択政策をみると，（３，８）より，すべての，ｉ，ｍに関して

$$\frac{x_i^*+(W_t)}{x_m^*(W_t)} = \frac{v_i^*}{v_m^*} = \text{const}.$$

となるから，危険資産の最適混合は，富，非利子所得および消費の待忍度に対して独立であり，したがって，v' に依存する収益の分布，利子率および効用関数に関係することになる。

また，各期での総投資の大きさは，(W_t+Y_t) に比例している。

さらに，$Y_t=0$ のときは，危険ポートフォリオが総ポートフオリオに占める比率は富と独立である。

§4 お わ り に

以上で検討したモデルの特性を左右する決定的な仮説は，効用関数に関するものであって，計画期間中の消費の効用が毎期の消費額の効用の和で，しかも，毎期の消費の効用は基本的には同一の形であるから，きわめて制約的な形である。

各期の消費の効用が過去および将来の消費に依存するのが一般的である。そのような一般的効用関数を導入したモデルは別の機会で検討したい。

次に決定的な仮定は，各期における資産収益率の確率分布がその期以前の実現質によって影響を受けないという仮定である。この仮定をはずしたときの議論はさらに分析される必要がある。

付記 本稿は「昭和51年度学校法人札幌大学研究助成費」による。

〔参考文献〕

〔1〕 Anastasopoulos, A and S. Kounias : Optimal Consumption over Time When Prices and Investment Rates Follow a Markovian Process, Econometrica 1975

〔2〕 Arrow, K. J. : Essays In The Theory of Rish-Beoring, 1970.

〔3〕 Bellman, R. E. : Dynamic Programming, Princeton Universxty Press, 1957.

〔4〕 Fama, E. J. : Multiperiode Consumption-Investment Decisions, American Economic Review, 1970.

〔5〕 Hokanson, N. H. : Optimal Investment and Consumption Under Risk, An Uncertain Lifetime and Insurano, International Economic Review, 1969.

〔6〕 Hokanson, N. H. : Optmol Investment And Consumption Strategies Under Risk for a Class of Utility Functions, Econometrica,1970.

〔7〕 Hakan, N. H. : Friedman-Savage Utility Functons Consistent with Risk Aversion, The Quarterly Journal of Economics, 1970.

〔8〕 Hokanson, N. H. : Optimal Growth Portfolio when Yilds arr Serially Correlated, The Review of Economics and Statistics,1970.

〔9〕 Hokanson, N. H. : Optimal Enterprenevrial Decisions in a Completely Stocastic Environment, Management Science, 1971.

〔10〕 Hokanson, N. H. : Multi-Period Mean-Voriance Analysis, Toward a General Theony of Portfolio Choio, The Jonrnal of Finance, 1971.

〔11〕 Hokanuon, N. H. : On Optimal Myopic Portfolio Policies, with and without Serial Correlation of Yislds, Journal of Business,1971.

〔12〕 Hokanson, N. H. : The Copital Asset Pricing Model : Some Open and Closed ends, in Risk and Return in Finance, (I. Friend and J. L. Bickslered, Ballinger, Cambridge Mass) 1977.

〔13〕 Markowitz, H. M. : Portfolio Selection-Effient Diversificotion of Investment, John Wiley & Sons, Inc, 1959.

〔14〕 Merton, R. C. : Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : The Continuous-Time Case, Review of Economics and Statistics, 1969.

〔15〕 Merton, R. C. : Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, Journal of Economic Theony, 1971.

〔16〕 Merton, . C and P. A. Samuelson, : Fallacy the Long-Normal Approximation to Optimal Portfolio Decision-Making over Many Periods, Journal of Financial Economics, 1974.

〔17〕 Mossin, J. : Optimal Multiperiod Portfolio Policies, Journal of Business, 1968.

〔18〕 Phelps, E. The Accumolation of Rioky Copitol : A Sequential Utility Analysis, in Risk Aversion and Portfolho Choice, ed. by Tobin, J and D. D Hester, John Wiley & Sons, 1967.

〔19〕 Pratt, J. W. : Risk Aversion in the Small and in the Large, Econometrico, 1964t

〔20〕 Samuelson, P. A. : Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, Review of Economics and Statistics, 1969.

〔21〕 Tobin, J. : The Theory of Portfolio Selection, in The Theory of Interest Rates, ed, by Hahn, F. H. and F, P, R. Brechling, Macmillan, 1966.

〔22〕 Zabel, E, Consumer Choice, Portfolio Decisions and Transaction Costs, Econometrica, 1973.